DM n$^{\text{o}}$1 (non noté)

Pour la rentrée des vacances de la Toussaint

Exercice 1 - Étude de deux suites implicites

Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

   (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.

   Indication : on pourra écrire $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x/2}}$

   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

   (d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0;+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante.

   (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge. On note ℓ sa limite.

   (c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

   (d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 u_n = 1$.

Exercice 2 - Une formule

Soit n un entier naturel fixé. Montrer par récurrence sur p que pour tout entier $p \geqslant n$ on a :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$$

Exercice 3 - Calculs de sommes

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{2^{k/2}}\binom{n}{n-k}$.
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   (b) En déduire la valeur de la somme : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. (a) Posons $f(x) = (1+x)^n$. En écrivant la dérivée de f de deux façons différentes, montrer que :

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}\binom{n}{k}$$

   (b) Utiliser cette égalité pour retrouver le résultat de la question précédente.
4. En utilisant un raisonnement similaire à celui de la question 3, calculer : $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$